A logo with a bee and a gear

Description automatically generated

**PHS4700**

**Physique pour les applications multimédia**

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

**Numéro du groupe : 01**

**Numéro de l’équipe :**

**Numéro de devoir : 02**

|  |
| --- |
| Nom : Diop Prénom : Abdul Hamid Matricule : 2141605  Signature : |
| Nom : Berger Prénom : Javier Matricule : 2206989  Signature : |
| Nom : Ngandjui Tchuente Prénom : Ewald Jordan Matricule : 2029689  Signature : |
| Nom : Jourba Prénom : Alexandra Matricule : 2413451  A black line drawing of a plane  Description automatically generated  Signature : |

Sommaire

[Introduction 3](#_Toc181053341)

[Étapes de résolution 5](#_Toc181053342)

[Définition du problème et hypothèses 5](#_Toc181053343)

[Résolution numérique 6](#_Toc181053344)

[Étude en précision 8](#_Toc181053345)

[Analyse des résultats 11](#_Toc181053346)

[Conditions initiales 11](#_Toc181053347)

[Résultats des simulations 11](#_Toc181053348)

[Essai 1 11](#_Toc181053349)

[Essai 2 13](#_Toc181053350)

[Essai 3 15](#_Toc181053351)

[Essai 4 16](#_Toc181053352)

[Conclusion 18](#_Toc181053353)

# Introduction

Le présent rapport a pour objectif d’étudier la trajectoire d’une balle de ping-pong après un coup, lorsqu’elle est soumise à différentes forces physiques. Lors d’un match de ping-pong, la balle va être influencée par plusieurs forces telles que la gravité, la résistance de l’air (frottement visqueux) et la force de Magnus qui s’applique puisque la balle est en rotation sur elle-même.

Ces forces modifient la trajectoire de la balle et son comportement en vol. L’objectif est donc de développer une simulation pour modéliser la trajectoire de la balle et analyser comment celle-ci se comporte en fonction de différentes conditions initiales et de l’influence des forces appliquées.

Pour ce faire, une fonction sous **Matlab** permettant de modéliser la trajectoire de la balle a été mis en place. Cette fonction tient compte de différents phénomènes physiques et détermine si après avoir été frappé la balle touche la table, le filet, ou sort des limites du jeu. 4 essais sont considérés pour le présent rapport, où dans chaque essai, la balle est frappée pour résulter en différentes conditions initiales dont sa position, sa vitesse et sa vitesse angulaire. Pour chacun de ces essais, trois options de scénarios de simulation sont envisagées :

* **Option 1** : La balle frappée est soumise uniquement à la gravité.
* **Option 2** : La balle frappée subit à la fois la gravité et une force de frottement visqueux.
* **Option 3** : En plus de la gravité et du frottement visqueux, la force de Magnus, due à la rotation de la balle sur elle-même, est prise en compte.

Chacune de ces options de scénario est testé et analysé. La simulation s'arrête dès que la balle touche la table, le filet ou sort du jeu. La trajectoire de la balle est calculée à partir des équations du mouvement, et les résultats obtenus permettent de visualiser le chemin parcouru par la balle et d’évaluer si le coup est réussi ou non.  
  
La fonction Matlab développée pour cette simulation est appelée de la manière suivante :

|  |
| --- |
| [ coup, vbf, ti, x, y, z ] = Devoir2 ( option, rbi, vbi, wbi ) |

Les paramètres d’entrée de la fonction sont les suivants :

* **option** : Un entier qui détermine le type de simulation :
* **1** pour une simulation avec seulement la gravité.
* **2** pour une simulation avec la gravité et la résistance de l’air.
* **3** pour inclure la gravité, la résistance de l’air et la force de Magnus.
* **rbi** : Un vecteur contenant les coordonnées initiales de la position du centre de masse de la balle   
  (exprimée en mètres)
* **vbi** : Un vecteur représentant la vitesse initiale de la balle   
  (exprimée en mètres par seconde).
* **wbi** : Un vecteur indiquant la vitesse angulaire initiale de la balle autour de son centre de masse   
  (exprimée en radian par seconde)

Les résultats retournés par la fonction sont :

* **coup** : Un entier indiquant l’issue de la simulation :
* **0** si le coup est réussi et que la balle atterrit du côté opposé.
* **1** si la balle touche la table du côté du joueur, indiquant un coup raté.
* **2** si la balle frappe le filet.
* **3** si la balle sort du jeu et touche le sol.
* **vbf** : Un vecteur indiquant la vitesse finale de la balle en m/s.
* **ti** : Un vecteur contenant les instants de temps correspondant aux différentes positions de la balle pendant la simulation.
* **x, y, z** : Des vecteurs contenant les coordonnées de la balle pour chaque instant enregistré.

Ce rapport présentera les résultats obtenus pour plusieurs simulations, avec des graphiques illustrant les trajectoires et des tableaux résumant les données clés pour chaque essai.

# Étapes de résolution

## Définition du problème et hypothèses

L'équation de base sur laquelle ce laboratoire repose est la deuxième loi de Newton qui s'écrit comme suit:

Avec :

* + - * : force 𝑖 qui agit sur l’objet
      * : masse de l’objet
      * accélération de l’objet

On considère ici la balle de ping-pong de forme sphérique, de masse et de rayon , qui évolue dans l’air. Celle-ci est soumise à la gravité , ainsi qu’aux frottements de l’air et à l’effet Magnus selon l’option envisagée.

On se place dans le référentiel du laboratoire, dont l’origine est située au pied de la table à droite du joueur, au niveau du sol. Au vu des forces agissant sur la balle et étant donné qu’on se place dans le formalisme de la mécanique du point, on peut faire l’hypothèse que l’accélération et la vitesse ne dépendent que du temps.

On connaît également la position et la vitesse initiales de la balle, et , ainsi que sa vitesse angulaire , que l’on considère comme constante au cours du temps.

On cherche à obtenir la trajectoire de la balle à partir du temps initial jusqu’à un temps , qui sera déterminé soit par l’instant où la balle touche une des surfaces de la table, soit par une valeur maximale = 10 s dans le cas où la balle sortirait du jeu sans toucher la table.

Au vu de l’hypothèse simplificatrice effectuée sur la vitesse angulaire et des résultats demandés par l’énoncé ( et pour ] ), on va effectuer la résolution uniquement en accélération linéaire, en laissant de côté l’accélération angulaire.

On utilise ainsi le principe fondamental de la dynamique pour calculer l’accélération de la balle de ping-pong à un instant t :

Avec :

Et les valeurs suivantes pour les différents paramètres :

* + - * Accélération de la pesanteur : = 9.8 m/s²
      * Masse volumique de l’air : = 1.2 kg/m3
      * Coefficient de traînée : = 0.5
      * Coefficient de Magnus **:**  = 0.29
      * Masse de la balle **:**  = 2.74 g
      * Rayon de la balle : = 1.99 cm

La résolution de l’équation différentielle vectorielle ci-après permet ensuite d’obtenir la vitesse et l’accélération à un instant t :

Avec :

## Résolution numérique

On utilise la méthode de Runge-Kutta d’ordre quatre pour résoudre numériquement l’équation différentielle précédente afin de déterminer numériquement une approximation de l'accélération de la balle à un instant t + un certain pas déterminé expérimentalement.

Pour ce faire, on commence par définir le pas temporel de résolution – la valeur de dt étant établie arbitrairement. (Ce choix de pas peut-être réviser dépendamment des besoins de précision, le pas choisit suffisait pour les besoins du problème.)

La solution est alors approximée de proche en proche à partir des conditions initiales par la formule suivante :

Avec :

Grâce à cette méthode, on réduit l’erreur d’approximation en calculant la moyenne sur 4 calculs d'accélération.

En pratique, cela se traduit par une boucle qui parcourt un vecteur contenant tous les instants de 0 à , avec un pas de . A chaque itération, on garde en mémoire la solution courante obtenue en position .

On utilise également cette solution en position pour calculer les critères d’arrêt :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Situation** | **Critère** | **‘coup’ correspondant** |
| La balle touche la table côté adversaire | et | 0 |
| La balle touche la table côté joueur | et | 1 |
| La balle touche le filet |  | 2 |
| La balle sort du jeu et touche le sol |  | 3 |

Lorsqu’un des critères d’arrêt est atteint, l’instant courant est relevé et devient l’instant final , et la boucle cesse d’être exécutée. La solution en vitesse correspondante est également relevée.

# Étude en précision

La valeur choisie pour a été déterminée par essai-erreur, et on peut dès lors s’interroger sur ce qu’elle représente rigoureusement en termes de précision des résultats ; on se propose ici de réaliser une étude en précision de la fonction développée.

Pour ce faire, on va tester différentes quantités d’intervalles paramétrés par un entier m comme suit :

On se propose d’évaluer ici uniquement la précision en position, en calculant la trajectoire sur une durée [ 0, pour et , puis en comparant les vecteurs obtenus selon le critère suivant :

où est pris égal à 1 mm . On instaure aussi des valeurs minimales et maximales pour m, qui correspondent aux exigences du devoir en termes de nombre minimal et maximale d’intervalles de temps. On teste ainsi différentes valeurs de m jusqu’à ce que le critère soit satisfait.

On obtient ainsi les résultats suivants pour les différentes options de simulation :

A screenshot of a graph

Description automatically generated

A screenshot of a graph

Description automatically generated

A screenshot of a graph

Description automatically generated

Le constat est que le critère choisit est sévère par rapport aux attendus du devoir et/ou aux performances de la modélisation. Le compromis a été fait en faveur du temps de calcul plutôt que de la précision.

# Analyse des résultats

La fonction implémentée servira à simuler 4 essais de tirs. Les conditions initiales de la balle (position du centre de masse, vitesse et vitesse angulaire) varieront entre chaque essai. Pour chaque essai, les 3 options de combinations de forces seront pour avoir au total 12 simulations.

## Conditions initiales

#### Tableau 1.1.1 : conditions initiales des essais

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Essai** | **rbi (m)** | **vbi (m/s)** | **wbi (rad/s)** |
| **1** | (0.00, 0.50, 1.10) | (4.00, 0.00, 0.80) | (0.00, -70.00, 0.00) |
| **2** | (0.00, 0.40, 1.14) | (10.00, 1.00, 0.20) | (0.00, 100.00, -50.00) |
| **3** | (2.74, 0.50, 1.14) | (-5.00, 0.00, 0.20 | (0.00, 100.00, 0.00) |
| **4** | (0.00, 0.30, 1.00) | | (10.00, -2.00, 0.20) | (0.00, 10.00, -100.00) |

## Résultats des simulations

Pour analyser les résultats obtenus, il est plus pertinent d'examiner l'effet des différentes forces sur la vitesse en fonction du temps car la position changera forcement vu que l’objet est en mouvement dès l’instant zéro.

### Essai 1

#### Tableau 1.2.1 : Conditions initiales de l’essai 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Position initiale (m)** | **Vitesse initiale (m/s)** | **Vitesse angulaire initiale (rad/s)** |
| (0.00, 0.50, 1.10) | (4.00, 0.00, 0.80) | (0.00, -70.00, 0.00) |

#### Tableau 1.2.2 : résultats de l’essai 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Options** | **Résultat du coup** | **Vitesse finale (m/s)** | **Temps final (s)** | **Position finale (m)** |
| **1** | 2 (raté filet) | (4.0, 0.0, -2.5075) | 0.3376 | (1.3504, 0.5, 0.8116) |
| **2** | 1 (raté côté joueur) | (3.3168, 0.0, -2.5006) | 0.3543 | (1.2929, 0.5, 0.7797) |
| **3** | 2 (raté filet) | (3.4413, 0.0, -1.6304) | 0.3811 | (1.3870, 0.5, 0.9323) |

A diagram of a table

Description automatically generated

#### 

#### Figure 1.1.1 : graphique de l’essai 1

#### Option 1

Dans le cas de l’option 1, où la seule force agissant sur la balle de golf est la gravité, nous obtenons la vitesse finale suivante : 𝑣𝑏𝑓 = (4,0, 0,0, -2,5075) m/s. On remarque que les composantes x et y de la vitesse finale sont identiques à celles de la vitesse initiale, tandis que la composante z a changé.

Cela est conforme à la théorie, car la gravité est la seule force appliquée sur la balle, agissant vers le bas et forçant la balle à retomber. La composante z de la vitesse finale est donc dirigée vers le bas et est négative, comme indiqué ci-dessus. Pour cette option, la variable "coup" prend la valeur de 2. La balle finit donc dans le filet.

#### Option 2

Pour l’option 2, soit l’option ou la force gravitationnelle ainsi que la force de frottement visqueux agissent sur la balle, nous obtenons la vitesse finale suivante : 𝑣𝑏𝑓 = (3.3168, 0.0, -2.5006) 𝑚/𝑠. Dans ce cas-ci, en plus de la composante z, la composante en x de la vitesse a changé par rapport à l’initiale. Cependant la composante y reste la même. De plus, il est intéressant de constater que la composante en z de la vitesse n’est pas la même que dans l’option 1. En effet, celle-ci est légèrement moins élevée que la valeur trouvée pour l’option 1 ci-dessus.

Nous sommes donc en mesure d’affirmer que la force de frottement visqueux s’oppose au mouvement de la balle dans toutes les directions et . Ceci est constatable en analysant l’équation de la force de frottement.

Une image contenant Police, texte, blanc, nombre

Description générée automatiquement

En effet, on remarque que la composante en y du vecteur 𝑣⃗𝑏 est nulle et donc, Si la composante en y est nulle, le |𝑣⃗𝑏 |𝑣⃗𝑏 ​ de l`équation de la force de frottement s'exprime uniquement en fonction de ses composantes en x et y. Et donc la force de frottement n’a pas d’effet dans la direction .

D’ailleurs, en comparant la position finale de la balle entre l’option 1 et 2, cette remarque est confirmée. (𝑂𝑝𝑡𝑖𝑜𝑛 1) 𝑝𝑜𝑠𝑖𝑡𝑖𝑜𝑛 𝑓𝑖𝑛𝑎𝑙𝑒 = (1.3504, 0.5, 0.8116) 𝑚 (𝑂𝑝𝑡𝑖𝑜𝑛 2) 𝑝𝑜𝑠𝑖𝑡𝑖𝑜𝑛 𝑓𝑖𝑛𝑎𝑙𝑒 = (1.2929, 0.5, 0.7797) m

Les composantes x et z de l’option 2 sont inférieures aux composantes de l’option 1 ce qui confirme que la balle est bel et bien déviée et que sa trajectoire a été ralentie sur ces deux axes. Cependant, la position en y reste la même. Pour cette option, nous obtenons une valeur de 1 pour la variable “coup”. La balle se retrouve donc sur le vert sans rentrer dans le trou.

#### Option 3

Dans cet essai, la balle présente une vitesse angulaire initiale de (0.0,−70.0,0.0) rad/s, indiquant une rotation négative autour de l’axe y. Cette rotation engendre une force de Magnus dirigée vers le haut, ce qui soulève la balle et réduit l’effet de la gravité sur l'axe z. La composante en y reste constante à 0,5 m, confirmant l’absence de rotation autour de l’axe z. La vitesse finale est de (3.4413,0.0,−1.6304) , montrant une réduction de la composante z par rapport aux autres options. Malgré cette élévation, la balle touche le filet, et la variable “coup” prend la valeur 2.  
Ce cas illustre comment une vitesse angulaire négative autour de l’axe y peut temporairement annuler l'effet de la gravité, permettant à la balle de finir plus haut, mais pas assez pour réussir le coup.

### Essai 2

#### Tableau 1.2.3 : Conditions initiales de l’essai 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Position initiale (m)** | **Vitesse initiale (m/s)** | **Vitesse angulaire initiale (rad/s)** |
| (0.00, 0.40, 1.14) | (10.00, 1.00, 0.20) | (0.00, 100.00, -50.00) |

#### Tableau 1.2.4 : résultats de l’essai 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Options** | **Résultat du coup** | **Vitesse finale (m/s)** | **Temps final (s)** | **Position finale (m)** |
| **1** | 3 (raté hors-jeu) | (10.0, 1.0, -4.6892) | 0.4990 | (4.99, 0.899, 0.0197) |
| **2** | 0 (réussi) | (7.0087, 0.7009, -2.4119) | 0.3068 | (2.5588, 0.6559, 0.7798) |
| **3** | 2 (raté filet) | (8.0573, 0.0391, -2.7723) | 0.1525 | (1.3768, 0.4743, 0.9323) |

**A diagram of a bridge

Description automatically generated**

#### 

#### Figure 1.1.2 : graphique de l’essai 2

#### Option 1

Dans la simulation 2, on observe les mêmes phénomènes que dans la simulation précédente. Les composantes x et y de la vitesse finale pour l’option 1 restent identiques à celles de la vitesse initiale, tandis que la composante en z est influencée par la force gravitationnelle: 𝑣𝑏0 = (10.00, 1.00, 0.20) [𝑚/𝑠] 𝑣𝑓 = (10.0, 1.0, -4.6892) [𝑚/𝑠] Pour cette option, la balle est déviée à l’extérieur du jeu. Nous obtenons donc une valeur de 3 pour la variable “coup”.

#### Option 2

Dans l’option 2, les composantes x, y et z de la vitesse sont modifiées par rapport à l’option 1. Toutes les composantes de la vitesse finale sont influencées par la force de frottement visqueux, qui s’oppose au déplacement de la balle de golf.

𝑣𝑓 = (20.018,12.319,−15.762) [m/s]

Dans ce cas, la balle atterrit dans le terrain adverse, et la variable "coup" prend la valeur de 0.

#### Option 3

Ici, la balle a une vitesse angulaire initiale de (0.0,100.0,−50.0) rad/s, ce qui génère une forte rotation autour de l’axe z. Cette rotation induit une déviation latérale vers la droite, comme attendu avec l’effet Magnus. La vitesse finale obtenue est (8.0573,0.0391,−2.7723) m/s. On remarque que la force de Magnus modifie à la fois les composantes y et z. La balle dévie le long de l’axe y, car la rotation autour de l'axe z influence la trajectoire latérale. Cependant, cette déviation combinée au frottement n’empêche pas la balle de toucher le filet, avec une valeur de “coup” égale à 2. Cette simulation illustre que la rotation complexe peut rendre le contrôle difficile, en particulier lorsque plusieurs forces interagissent.

### Essai 3

#### Tableau 1.2.5 : Conditions initiales de l’essai 3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Position initiale (m)** | **Vitesse initiale (m/s)** | **Vitesse angulaire initiale (rad/s)** |
| (2.74, 0.50, 1.14) | (-5.00, 0.00, 0.20 | (0.00, 100.00, 0.00) |

#### Tableau 1.2.6 : résultats de l’essai 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Options** | **Coup** | **Vitesse finale (m/s)** | **Temps final (s)** | **Position finale (m)** |
| **1** | 2 (raté filet) | (-5.0, 0.0, -2.4460) | 0.2701 | (1.3895, 0.5, 0.8365) |
| **2** | 2 (raté filet) | (-4.1232, 0.0, -2.4838) | 0.2971 | (1.3898, 0.5, 0.7879) |
| **3** | 0 (réussi) | (-4.1124, 0.0, -1.6639) | 0.4911 | (0.5676, 0.5, 0.7798) |

A diagram of a table

Description automatically generated

#### 

#### Figure 1.1.3 : graphique de l’essai 3

#### Option 1

Les mêmes phénomènes se manifestent dans la simulation 3. Les composantes x et y de la vitesse dans l’option 1 demeurent inchangées, tandis que la composante en z est influencée par la force gravitationnelle.

𝑣𝑏0 = (-5.00, 0.00, 0.20) [m/s]

𝑣𝑓 = (-5.0, 0.0, -2.4460) [m/s]

Dans cette option, la balle touche le filet et le coup est raté. La variable "coup" prend donc la valeur de 2.

#### Option 2

Dans le cas de l’option 2, même situation qu’à la simulation 1. Toutes les composantes de la vitesse sont affectées sauf y car elle est initialement nulle. Il est donc possible de constater, une fois de plus, que la force de frottement visqueux s’oppose au mouvement de la balle. Pour cette option, la balle touche encore le filet et le coup est raté. La variable "coup" prend donc la valeur de 2.

#### Option 3

Dans cet essai, la vitesse angulaire initiale est (0.0,100.0,0.0) rad/s, avec une rotation positive autour de l’axe y et sans rotation autour de l’axe z. En conséquence, la position en y reste constante à 0,5 m tout au long de la trajectoire, sans déviation latérale. La force de Magnus agit principalement en ajustant la composante z, réduisant l’effet de la gravité. La vitesse finale est de (−4.1124,0.0,−1.6639) m/s. Grâce à l'élévation supplémentaire fournie par l'effet Magnus, la balle franchit le filet et atterrit dans le camp adverse, avec une valeur de "coup" égale à 0. Cette simulation démontre que, lorsque l'axe de rotation est bien aligné, l'effet Magnus peut offrir une trajectoire idéale pour réussir le coup.

### Essai 4

#### Tableau 1.2.7 : Conditions initiales de l’essai 4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Position initiale (m)** | **Vitesse initiale (m/s)** | **Vitesse angulaire initiale (rad/s)** |
| (0.00, 0.30, 1.00) | | (10.00, -2.00, 0.20) | (0.00, 10.00, -100.00) |

#### Tableau 1.2.8 : résultats de l’essai 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Options** | **Coup** | **Vitesse finale (m/s)** | **Temps final (s)** | **Position finale (m)** |
| **1** | 3 (raté hors-jeu) | (10.0, -2.0, -4.3874) | 0.4682 | (4.6820, -0.6364, 0.0195) |
| **2** | 2 (raté filet) | (8.2862, -1.6572,-1.1647) | 0.1486 | (1.3508, 0.0298, 0.9253) |
| **3** | 2 (raté filet) | (7.7692, -3.1914,-1.3534) | 0.1527 | (1.3504, -0.1036, 0.9078) |

#### A diagram of a table Description automatically generated

#### Figure 1.1.4 : graphique de l’essai 4

#### Option 1

De même ici pour la simulation 4, Les composantes x et y de la vitesse l’option 1 demeurent inchangées, tandis que la composante en z est influencée par la force gravitationnelle.

𝑣𝑏0 = (10.00, -2.00, 0.20) [m/s]

𝑣𝑓 = (10.0, -2.0, -4.3874) [m/s]

Dans cette option, la balle sort dehors. La variable "coup" prend donc la valeur de 3.

#### Option 2

Dans l’option 2, les composantes x, y et z de la vitesse sont modifiées par rapport à l’option 1. Toutes les composantes de la vitesse finale sont influencées par la force de frottement visqueux, qui s’oppose au déplacement de la balle de golf. Dans ce cas, la balle atterrit dans le terrain filet, et la variable "coup" prend la valeur de 2.

#### Option 3

Pour cet essai, la balle présente une vitesse angulaire initiale de (0.0,10.0,−100.0) rad/s, ce qui génère une rotation complexe autour des axes y et z. La rotation autour de l'axe z engendre une déviation latérale significative vers la gauche. La vitesse finale est de (7.7692,−3.1914,−1.3534) m/s. On remarque que l'effet Magnus agit fortement sur les axes y et z, mais cette interaction complexe rend difficile le contrôle de la trajectoire. La balle finit par toucher le filet, et la variable “coup” prend la valeur 2. Cette simulation montre encore une fois comment la force de Magnus peut être appliquée à plusieurs endroits lorsque qu’il y a plusieurs axes de rotations.

# Conclusion

En conclusion, cette simulation met en évidence l'importance de la modélisation précise des forces physiques pour prévoir la trajectoire réelle d'un objet. Les effets du frottement de l'air et de la force Magnus sont essentiels pour reproduire des conditions réalistes, la gravité seule ne suffit.

Le laboratoire permet de voir clairement que chaque force a un rôle important qui va influencer la trajectoire de la balle comme l’on peut d’ailleurs le constater dans la section ‘Analyse’ où l’on étudie surtout le comportement des vitesses dans les différents scénarios. Alors que certaines forces ont un effet constant sur la balle telle que la gravité qui va changer la composante z de sa vitesse, d’autres ont un effet plus variable telle que la force de Magnus qui par moment peut permettre à la balle de se rendre plus loin que si elle n’est pas appliquée et par d’autres de se rendre moins loin. De manière général, des changements qui semblent insignifiants dans les composantes individuelles des vecteurs de force peuvent mener à des résultats entièrement différents.

Finalement au niveau des améliorations, le pas utilisés dans la méthode de Runge-Kutta pourrait être réduit pour une meilleure précision des calculs.